26/01/2015

Chapitre I : Généralités sur les groupes

I - La structure de groupe

Définition 1 Soit E un ensemble. Une loi interne à E est définie par la donnée d'une application de $E \times E$ dans E.

$$* : \begin{cases} E \times E \longrightarrow E \\ (x, y) \longmapsto x * y \end{cases}$$

Définition 2 On dit qu'une $\overbrace{\text{loi } *}^{\text{interne à } E}$ est associative lorsque pour x, y, z appartenant à E, on a :

$x * (y * z) = (x * y) * z$

Définition 3 On dit qu'une loi $*$ interne à E est commutative lorsque pour x, y appartenant à E, on a : $x * y = y * x$

Exemples

"+" est associative et commutative (dans $\mathbb{R}$)

"−" n'est ni associative ni commutative.

Théorème 1 Lorsqu'une loi $*$ interne à E est associative, il est possible de se dispenser des parenthèses.

En particulier, pour x appartenant à E, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut définir : $x^n = \underbrace{x * x * \dots * x}_{n \text{ fois}}$

Remarque

De façon générale, on note une loi $*$. Pour faciliter la compréhension et pour faire le lien avec l'aspect calculatoire on peut utiliser la notation additive "+" ou multiplicative "×" ou "·"

Suite du Théorème

et les relations suivantes sont vraies :

$x^m * x^n = x^{m+n}$
$(x^m)^n = x^{m.n}$

D'autre part, si la loi $*$ est commutative alors $x_1, x_2, \ldots, x_k$ appartenant à E et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\boxed{(x_1 * x_2 * \ldots * x_k)^n = x_1^n * x_2^n * \ldots * x_k^n}$

L'idée ici est d'automatiser le calcul comme on le fait dans le cas réel mais dans un cadre abstrait.

Définition 4 Soit $*$ une loi de composition interne dans E. On dit qu'un élément e de E est neutre pour l'opération $*$ lorsque pour tout x de E on a : $e * x = x * e = x$

Théorème 2 Une loi interne admet au plus un élément neutre.

démonstration

Soient e et e' deux éléments neutres pour la loi $*$

e est un élément neutre de $*$ implique :

$e * e' = e' * e = e'$ (1)

e' est un élément neutre de $*$ implique :

$e' * e = e * e' = e$ (2)

On déduit de (1) et (2) est $e = e'$

Définition 5 Soit $*$ une loi de composition interne dans E admettant un élément neutre e. On dit que l'élément y de E est symétrique de $x \in E$ lorsque $x * y = y * x = e$

Définition 6 Soit E un ensemble. Une loi $*$ interne à E, associative, pour laquelle il existe un élément neutre e et telle que tout élément de E possède un symétrique est appelée loi de groupe

On dit que E muni de cette loi est un groupe et on note $(E, *)$.
Lorsque la loi $*$ est commutative, le groupe E est dit abélien ou commutatif.

↳ Référence au mathématicien Abel qui a montré que les équations de degré 5 ne sont pas résoluble par radicaux.

Théorème 3 : Dans un groupe, un élément admet toujours un unique symétrique.

démonstration (en exercice)

Exemples de groupe

$(\mathbb{Z}, +)$
$(\mathbb{Q}^*, \times) \rightarrow 0$ n'a pas de symétrique
$(\mathbb{R}^*, \times)$
$(\mathbb{C}^*, \times)$
$(S_X, \circ)$ composition
$(GL(2,\mathbb{R}), \times)$ produit matriciel

Notations On peut employer une notation multicative ou additive pour la loi du groupe. On notera alors de la façon suivante l'élément neutre, le symétrique et les puissances :

loi	élt neutre	symétrique	puissances
$+$	0	$-x$	$nx = x + x + x + \dots + x$
$\cdot$ $\times$	1	x^{-1}	$x^n = \underbrace{x \times x \times x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$

On utilisera le plus souvent une notation additive pour les groupes abéliens (modèle : $(\mathbb{Z}, +)$). Dans le cas d'une notation multiplicative, on peut omettre le symbole de l'opération $x \times y = xy$

⚠ $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$ ($\neq x^{-1}y^{-1}$) dans un groupe (en général)

⇒ Démonstration du théorème 3

Soit x un élément du groupe $(G, *)$.

Supposons que x admet 2 éléments symétriques y_1 et y_2

$(y_1 * x) * y_2 = e * y_2$ car x admet y_1 comme symétrique

$= \underline{y_2}$ car e est l'élément neutre du groupe.

$y_1 * (x * y_2) = y_1 * e$ car x admet y_2 comme symétrique

$= \underline{y_1}$ car e est l'élt neutre

La loi $*$ est associative donc

$(y_1 * x) * y_2 = y_1 * (x * y_2)$

on en déduit que $y_1 = y_2$

Proposition 4 Les propriétés suivantes pour un groupe $(G, \times)$, noté multiplicativement, sont fondamentales :

(i) $e^{-1} = e$

(ii) pour tout $g \in G$, $(g^{-1})^{-1} = g$

(iii) pour tout $g, g' \in G$, $(g \times g')^{-1} = g'^{-1} \times g^{-1}$

(iv) pour tout $g_1, \ldots, g_n \in G$,

$$(g_1 \times g_2 \times \ldots \times g_n)^{-1} = g_n^{-1} \times \ldots \times g_1^{-1}$$

En particulier, pour $g \in G$, on a :

$$(\underbrace{g \times \ldots \times g}_{n \text{ fois}})^{-1} = (g^n)^{-1} = \underbrace{g^{-1} \times \ldots \times g^{-1}}_{n \text{ fois}} = (g^{-1})^n$$

Si on pose $g^{-n} := (g^n)^{-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$

et $g^0 := e$

on obtient les propriétés bien connues suivantes :

pour tous $g \in G$, $m, m' \in \mathbb{Z}$,

$$g^m \times g^{m'} = g^{m+m'} \quad \text{et} \quad (g^m)^{m'} = g^{mm'}$$

02/01/2015 II - Produit direct de groupes.

Théorème 5 Soient deux groupes G et G' dont les éléments neutres respectifs sont notés 1 et $1'$. Alors la loi définie sur le produit $G \times G' = \{(x, x'), x \in G, x' \in G'\}$ par $(x, y).(x', y') = (xx', yy')$ est une loi du groupe. Il est clair que son élément neutre est $(1, 1')$ et que (x^{-1}, y^{-1}) est l'inverse de (x, y).

Remarque de façon plus rigoureuse on a aurait dû écrire $(x, y) * (x', y') = (x \Delta x', y \square y')$ mais on utilise la notation multiplicative pour simplifier l'écriture.

Définition 7. Avec les notations précédentes, $G \times G'$ est appelé le produit direct de G et G'.

III - Exemples de groupes

1. $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes abéliens

2. $(\mathbb{Z}^n, +)$, $(\mathbb{Q}^n, +)$, $(\mathbb{R}^n, +)$ et $(\mathbb{C}^n, +)$ sont des groupes abéliens.

3. $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{R}^*, \times)$ et $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes abéliens multiplicatifs.

4 Plus généralement, si $\mathbb{K}$ est un corps alors $\mathbb{K}^*$ est un groupe multiplicatif.

5. $(\{-1, 1\}, \times)$ est un groupe multiplicatif abélien.

U_2 "

$\times$	-1	1
-1	1	-1
1	-1	1

6. $(\{1, -1, i, -i\}, \times\}$ est un groupe multiplicatif abélien.
U_4

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

→ table de i
chaque élt apparaît qu'une seule fois sur chaque ligne et chaque colonne.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère :
$U_n = \{ e^{2ik\pi/n}, k = 0, \ldots, n-1 \}$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. (i.e. l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^n - 1 = 0$).
Alors $(U_n, \times)$ est un groupe abélien fini.

8. Soit X un ensemble quelconque. L'ensemble des bijections de X dans lui-même muni de la loi de composition forme un groupe en général non abélien, noté S_X. L'élément neutre est Id et l'inverse est la bijection réciproque.

Lorsque $X = \{1, \ldots, n\}$ on note S_n.
S_n est le groupe des substitutions sur n éléments.
$|S_n| = n!$
S_n est non abélien pour $n > 2$.